~ CURS 1 ~

Cap. I - CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

I.1. Introducere

În regim dinamic, circuitele liniare sunt descrise de ecuații integro-diferenţiale. Tensiunile și curenții laturilor, potențialele nodurilor, tensiunile electromotoare și curenții surselor independente sunt, în general, funcții de timp de o clasă largă. O clasă simplă de funcții de timp de mare importanță în studiul regimurilor circuitelor electrice o constituie funcțiile sinusoidale.

Regimul permanent sinusoidal prezintă o importanță deosebită, teoretică și practică, intervenind în producerea, transmisia și utilizarea energiei electrice, cât și în telecomunicații, semnalizări și automatizări.

I.2. Mărimi sinusoidale. Metoda simbolică de reprezentare a mărimilor sinusoidale

O mărime periodică $m(t)$ este complet caracterizată atunci când se cunoaște variația sa în timp pe durata unei perioade. Acest lucru poate fi realizat fie prin expresia analitică a funcției $m(t)$, fie prin reprezentarea ei grafică, fie prin tabelarea numerică. O mărime periodică se caracterizează prin:

- valoarea de vârf (amplitudinea), $M_{\max}$, care este valoarea maximă pe care o poate lua mărimea periodică în decursul unei perioade.

- valoarea medie, M_{med}, este media pe o perioadă a valorilor instantanee:

$$M_{med} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m(t)\mathrm{d}t\,, \tag{1.1}$$

Momentul t_0 putând fi oarecare. O mărime periodică de valoare medie nulă se numește <u>mărime alternativă.</u>

- valoarea efectivă (eficace) este rădăcina pătrată a valorii medii pe o perioadă a pătratului funcției:

$$M = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m^2(t)\mathrm{d}t}\,. \tag{1.2}$$

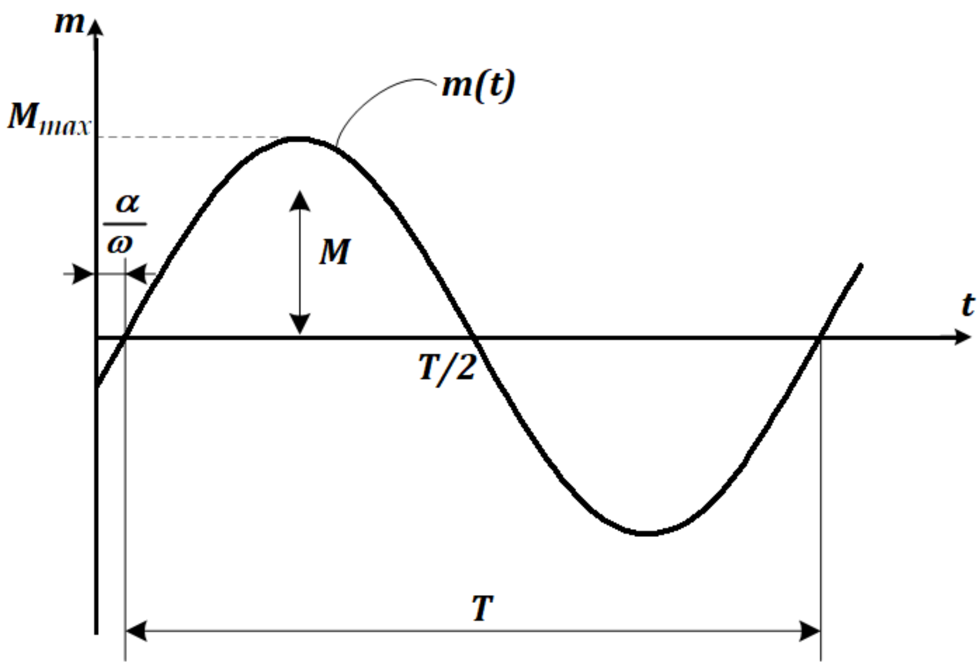


Fig. 1.1. Mărime sinusoidală.

Obs: În cazul mărimilor sinusoidale, valoarea sa efectivă poate fi interpretată ca fiind valoarea din curent continuu care produce același efect Joule-Lenz pe un număr întreg de perioade.

În aceste condiții, o mărime sinusoidală poate fi scrisă:

$$m(t) = M_{\max} \sin(\omega t + \alpha),$$

unde: $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ - pulsația (frecvența unghiulară),

α = faza inițială (t = 0).

Pentru mărimile sinusoidale avem:

$$M = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} M_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \alpha)\mathrm{d}t} = \frac{M_{\max}}{\sqrt{2}}, \tag{1.3}$$

Astfel, mărimea sinusoidală se mai poate scrie și sub forma:

$$m(t) = M\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha), \tag{1.4}$$

Diferența de fază dintre două mărimi sinusoidale se numește <u>defazaj</u>:

$$\varphi = (\omega t + \alpha_1) - (\omega t + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2 . \tag{1.5}$$

Operații cu mărimi sinusoidale:

a) **multiplicarea cu un scalar λ**

$$\lambda \cdot m(t) = \sqrt{2}\,\lambda M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\,|\lambda| M \sin(\omega t + \alpha'),$$

→ dacă $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha' = \alpha$: mărimile *m(t)* și *λm(t)* sunt în fază;

→ dacă $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha' = \alpha \pm \pi$: mărimile *m(t)* și *λm(t)* sunt sinfazice.

b) **Adunarea mărimilor sinusoidale**

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t) = M_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_1) + M_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha_2) =$$
$$= M\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha),$$

unde:
$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)};$$
$$\alpha = arctg\frac{M_1\sin\alpha_1 + M_2\sin\alpha_2}{M_1\cos\alpha_1 + M_2\cos\alpha_2}.$$

c) **Derivata în raport cu timpul**

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\,\omega M\cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\,\omega M\sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \qquad (1.6)$$

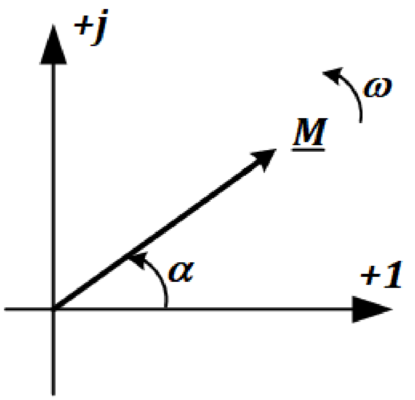
d) **Integrala în raport cu timpul**

$$\int m(t)\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\frac{M}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\frac{M}{\omega}\sin(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}). \qquad (1.7)$$

e) **Produsul scalar a două mărimi sinusoidale**

$$p = m_1(t)\cdot m_2(t) = 2M_1M_2\sin(\omega t + \alpha_1)\sin(\omega t + \alpha_2) =$$
$$= M_1M_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - M_1M_2\cos(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_2).$$

Se poate observa astfel că efectuarea unor calcule cu mărimi sinusoidale se poate dovedi anevoios, de aceea calculul în regimul permanent sinusoidal se poate simplifica substanțial (când mărimile sinusoidale cu care se lucrează sunt de aceeași frecvență) dacă se utilizează <u>*metoda simbolică a reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale*</u>.



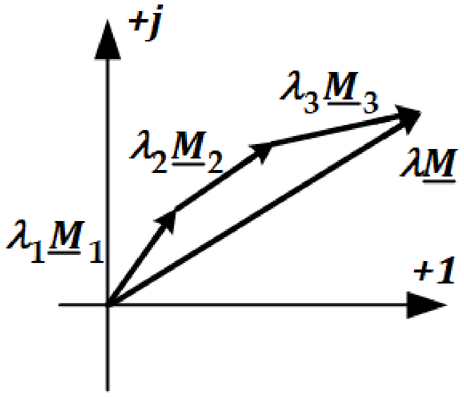
$$m(t) = M\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{C}\{m(t)\} = \underline{M} = Me^{j\alpha}. \qquad (1.8)$$

Este necesară cunoașterea câtorva proprietăți importante ale acestei transformări, ce va facilita liniarizarea ecuațiilor integro-diferențiale din domeniul timp, în domeniul complex.

a) *teorema combinațiilor liniare*: complexul unei combinații liniare de mărimi sinusoidale având aceeași frecvență se obține prin substituirea mărimilor sinusoidale cu imaginile lor complexe.

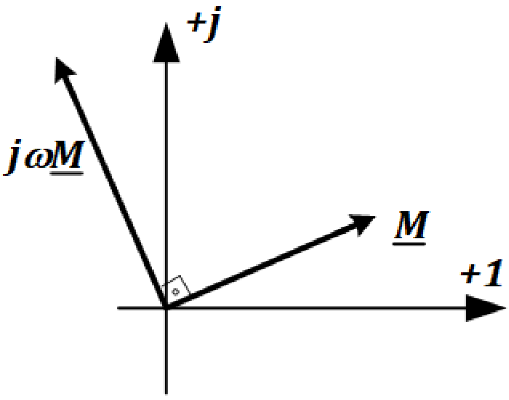


$$\mathcal{C}\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k m_k(t)\right\}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underline{M}_k\,, \qquad (1.9)$$

cu λ_k constante și

$$m_k(t)=M_k\sqrt{2}\sin(\omega t+\alpha_k)\,.$$

b) *teorema derivatei*: complexul derivatei de ordinul n în raport cu timpul al unei mărimi sinusoidale este egal cu complexul mărimii sinusoidale multiplicată cu $(j\omega)^n$.



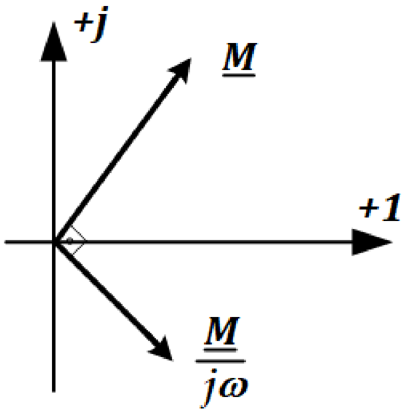
$$\mathcal{C}\left\{\frac{\mathrm{d}^n m(t)}{\mathrm{d}t^n}\right\}=(j\omega)^n\,\underline{M} \qquad (1.10)$$

Demonstrație:

$$\mathcal{C}\left\{\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\right\}=\mathcal{C}\left\{\sqrt{2}\,\omega M\sin(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})\right\}=$$

$$=\omega M e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\frac{\pi}{2}}\omega M e^{j\alpha}=j\omega\underline{M}.$$

c) *teorema integralei*: complexul integralei nedefinite în raport cu timpul al unei mărimi sinusoidale este egal cu complexul mărimii sinusoidale împărțit la $(j\omega)$



$$\mathcal{C}\left\{\int m(t)\mathrm{d}t\right\}=\frac{1}{j\omega}\underline{M} \qquad (1.11)$$

Demonstrație:

$$\mathcal{C}\left\{\int m(t)\mathrm{d}t\right\}=\mathcal{C}\left\{\sqrt{2}\frac{M}{\omega}\sin(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})\right\}=$$

$$=\frac{1}{\omega}Me^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{j\omega}\underline{M}.$$

I.3. Caracterizarea dipolului liniar pasiv

Se consideră un dipol liniar pasiv, aflat în regim sinusoidal, caracterizat de curent și tensiune (fig. 3.6):

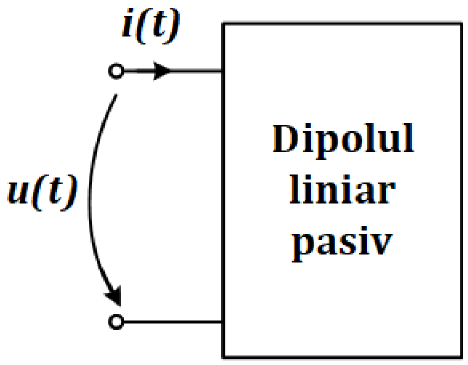
$$i(t) = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha_I\right),$$

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \alpha_U\right).$$

În complex, cele două mărimi au expresiile:

$$\underline{I} = Ie^{j\alpha_I}$$

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha_U}$$



Circuitul dipolar liniar, pasiv și fără cuplaje magnetice cu exteriorul, este caracterizat de **impedanța complexă**:

$$\underline{Z} \overset{d}{=} \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha_U}}{Ie^{j\alpha_I}} =$$

$$= \frac{U}{I}e^{j(\alpha_U - \alpha_I)} = Ze^{j\varphi} =,$$

$$= Z\cos\varphi + j \cdot Z\sin\varphi.$$

unde: $\varphi = \alpha_U - \alpha_I = \operatorname{arctg}\dfrac{X}{R}$ - argumentul impedanței = arg{$\underline{Z}$},

$Z \overset{d}{=} \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}$ - modulul impedanței.

Se pot nota următoarele mărimi:

$R = \Re e\{\underline{Z}\} = Z\cos\varphi$ - rezistența,

$X = \Im m\{\underline{Z}\} = Z\sin\varphi$ - reactanța,

$[Z]_{\mathrm{SI}} = [R]_{\mathrm{SI}} = [X]_{\mathrm{SI}} = 1\Omega$,

$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X}{R}$.

Valoarea inversă a impedanței complexe se numește **admitanță complexă** și se definește ca:

$$\underline{Y} = \frac{Ie^{j\alpha_I}}{Ue^{j\alpha_U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z}e^{-j\varphi} = Y\cos\varphi - j \cdot Y\sin\varphi = G - jB$$

unde: $Y = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{I}{U}$ este modulul admitanței.

$G = \Re e\{\underline{Y}\} = Y\cos\varphi$ - conductanță,

$B = \Im m\{\underline{Y}\} = Y\sin\varphi$ - susceptanță,

$[Y]_{\mathrm{SI}} = [G]_{\mathrm{SI}} = [B]_{\mathrm{SI}} = 1S$.

Între mărimile impedanței complexe și a admitanței complexe se pot identifica următoarele relații:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2},$$

cu: $G = \dfrac{R}{R^2 + X^2}$, $B = \dfrac{X}{R^2 + X^2}$.